FISICA I

UNIDAD II - CINEMÁTICA

Contenido

UNIDAD II – CINEMÁTICA

La cinemática es el estudio del movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que los producen, cosa que veremos al abordar el tema de Dinámica.

En esta unidad estudiaremos diversos tipos de movimientos. Para realizar este estudio consideraremos un cuerpo especial que en física llamamos “punto material”, representado por un móvil puntual, que es básicamente una idealización correspondiente a un cuerpo sin volumen, en el cual toda su materia se encuentra concentrada en un punto.

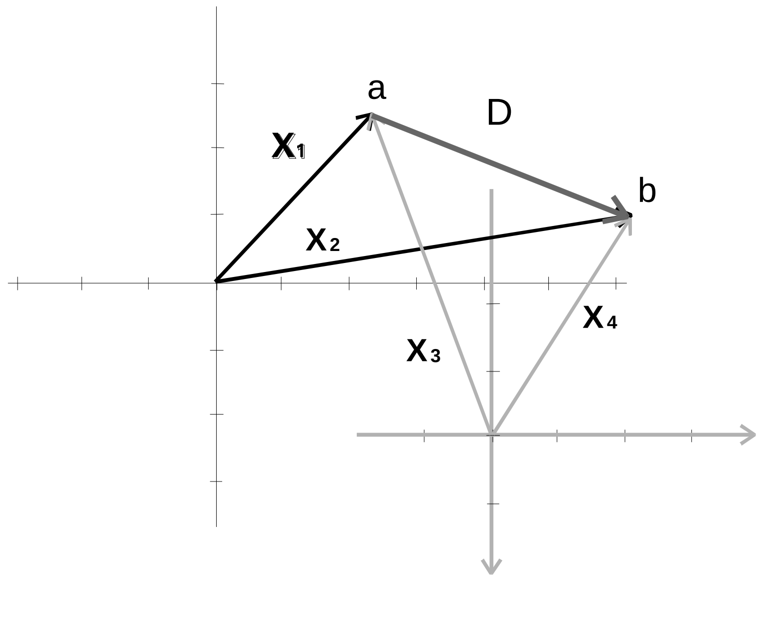
Este punto material es una modelización que no tiene en cuenta otros movimientos que pueden producirse en cuerpos macroscópicos sólidos, como los de rotación, ni características derivadas de la distribución de materia dentro del volumen del cuerpo.

De esta manera podremos estudiar el movimiento de diferentes cuerpos, por ejemplo un automóvil, como si lo viéramos desde muy lejos (como si fuera puntual), lo que es equivalente a considerar el movimiento de su “centro de masa”.

MOVIMIENTO

Reconocemos un objeto en movimiento porque su posición cambia. Ya que la posición debe describirse respecto de algún sistema de referencia, es conveniente analizar cómo influye la elección del sistema de referencia en la descripción del movimiento.

La posición se describe cómodamente mediante un vector con origen en el sistema de referencia. El gráfico que sigue ilustra al respecto:



La posición del punto **a** puede describirse con el vector $\mathbf{X_1}$ o bien con el $\mathbf{X_3}$ según el punto de referencia que elijamos, y está claro que hay infinitas posibilidades al respecto. Lo mismo sucede con el punto **b**.

Si consideramos ahora el **desplazamiento** desde **a** hasta **b,** que podemos representar con el vector **D**, resulta:

$$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_2 \qquad \text{o bien} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$$

El desplazamiento es descrito como la diferencia entre dos posiciones, lo que tiene sentido físico y matemático. Pero también

$$\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_4 \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_4 - \boldsymbol{X}_3$$

resultando entonces que

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_{final} - \boldsymbol{X}_{inicial} = \Delta\boldsymbol{X}$$

con lo que se ilustra que el desplazamiento es independiente del sistema de referencia, siempre que consideremos sistemas en reposo relativo entre sí.

¿Qué significa esto en la práctica? Simplemente que, por ejemplo, si se observa la caída de un objeto cualquiera, desde el balcón de donde cae, o desde el piso donde llega, o desde otro edificio, el desplazamiento observado será siempre el mismo.

Las cosas cambian si consideramos sistemas de referencia en movimiento. Por ejemplo, si caemos junto con el objeto, el desplazamiento nos parecerá nulo, mientras que si lo observamos desde un ascensor que va subiendo, veremos un desplazamiento mayor.

¿Cuál será el movimiento *verdadero*? ¿Será acaso el que se observa desde una posición fija respecto al suelo? Tenemos una fuerte tendencia a creer esto, pero es arbitrario. Nuestro planeta se mueve vertiginosamente por el espacio y, de hecho, no hay ninguna razón que nos permita decidir que tal o cual sistema está en reposo absoluto. O sea, que tampoco hay razón para decidir sobre el movimiento absoluto de cualquier objeto.

Diremos entonces que:

El movimiento es relativo y todo está siempre en movimiento respecto de algo.

Aún después de reconocer que la Tierra no estaba en reposo, el hombre intentó mantener algo inmóvil e imaginó la existencia del éter. También hubo que desecharlo.

Admitir esto, le llevó al hombre algunos miles de años de observar y reflexionar sobre el mundo que lo rodea, para poder superar la idea ancestral de la inmovilidad del suelo que pisaba.

Veamos ahora algunas de las herramientas que la Física ha desarrollado para la descripción y predicción de movimientos.

La cinemática nos provee de un conjunto de relaciones útiles para describir posiciones y movimientos:

VELOCIDAD

Si el desplazamiento ***D*** ocurrió en el lapso de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, se define velocidad media en el intervalo Δt:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{D}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{X}}{\Delta t}$$

Supongamos, a modo de ejemplo, que queremos calcular la velocidad media de una hormiga que se aleja de su hormiguero en línea recta, sabiendo que a las 10:00 hs se encuentra a 2 metros del mismo y a las 10:03 hs a 25 metros. En tal caso

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{23\ \mathrm{m}}{180\ s} = 0{,}1278\ \frac{m}{s}$$

Ahora debemos considerar la siguiente cuestión: 3 minutos es un intervalo de tiempo bastante amplio. ¿Cómo resultará la velocidad media si la calculamos en un intervalo de 10 segundos, por ejemplo, al comienzo del tercer minuto? Para contestar, deberíamos tener los datos correspondientes de las posiciones. En principio el hecho de haber recorrido 23 metros en 180 segundos, no garantiza que recorra 1,278 metros en 10 segundos. Podría tanto dar el mismo resultado como otro distinto. Incluso podría dar cero si en ese tiempo la hormiga está descansando.

Se comprende que podemos repetir la pregunta para 1 segundo, una décima, una milésima o cualquier otro valor de tiempo, tan pequeño como se nos ocurra. Siempre que contemos con los datos de las posiciones, podremos calcular las velocidades.

En esta idea de considerar qué pasa al empequeñecer el intervalo, reconocemos los conceptos de límite y derivada. Es lo que utilizaremos para definir la *velocidad instantánea*, o velocidad a secas:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{X}}{\Delta t}$$

resultando la *velocidad instantánea*:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} \tag{2.1}$$

La velocidad se define como la derivada del espacio recorrido respecto del tiempo y expresa la rapidez con que cambia la posición, así como la dirección y sentido del movimiento, dado su carácter vectorial.

ACELERACIÓN

Si reparamos en que la magnitud velocidad nos da información sobre un aspecto (su relación con el tiempo) de la variación de la magnitud posición, nos será fácil dar un nuevo paso.

Si **v** varía con el tiempo, podemos definir una nueva magnitud que nos informe sobre cómo es el cambio de la velocidad con el tiempo. Llamaremos aceleración media a:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

Y realizando la operación de paso al límite como antes, tendremos la aceleración instantánea o aceleración a secas:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

resultando la *aceleración instantánea*:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad (2.2)$$

Como

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right)$$

podemos escribir

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}$$

La aceleración se define como la derivada de la velocidad respecto del tiempo o, lo que es lo mismo, como la derivada segunda de la posición respecto del tiempo y expresa la rapidez con que cambia la velocidad, así como la dirección y sentido del cambio, dado su carácter vectorial.

La aceleración entonces, es una magnitud que nos informa sobre las características del cambio de velocidad, en forma similar a cómo la velocidad nos informa sobre el cambio de posición.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Es importante recalcar que tanto la velocidad como la aceleración son vectores, poseen módulo, dirección y sentido. Por lo tanto las ecuaciones diferenciales que presentamos antes para la velocidad (2.1) y para la aceleración (2.2), son ecuaciones vectoriales.

Cada una de estas ecuaciones está escrita en una forma "compacta", por así decirlo, y puede descomponerse en un sistema de coordenadas cartesianas (ejes x, y, z) en tres ecuaciones, una para cada eje. De modo que cuando escribimos

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$$

Esta ecuación expresada en sus componentes cartesianos corresponde a:

$$(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Es decir que

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad y \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

De lo anterior surge que si un móvil se desplaza sobre un camino recto (o con una restricción aún mayor, si el movimiento tiene velocidad constante –Movimiento Rectilíneo Uniforme, MRU–), podremos elegir convenientemente un eje cartesiano, por ejemplo el eje x, en la dirección del vector velocidad, y trabajar en una única dimensión (justamente la del eje cartesiano elegido). En tal caso el signo, positivo o negativo, de la velocidad, indicará el sentido en que ocurre el movimiento a lo largo de dicho eje.

Análogamente, la ecuación diferencial para la aceleración

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Se expresa en sus componentes cartesianos como:

$$(a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

Siendo entonces

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad y \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Si un movimiento tiene aceleración constante (por ejemplo un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado –MRUV–), podremos elegir convenientemente un eje cartesiano en la dirección del vector aceleración y trabajar con la aceleración en una única dimensión (justamente la del eje cartesiano elegido). En tal caso el signo positivo o negativo de la aceleración, indicará si el movimiento es acelerado (la velocidad aumenta) o desacelerado (la velocidad disminuye) a lo largo de dicho eje.

INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

Llamamos *movimiento uniformemente variado* a aquel en el cual el vector aceleración (**a**) se mantiene constante a lo largo del tiempo. Es decir que es un movimiento durante el cual no se modifica la intensidad, dirección ni sentido de la aceleración, por lo que el móvil incrementa o decrementa su velocidad a un ritmo constante.

Un móvil con este tipo de movimiento, aumenta (o disminuye según el signo de la aceleración) su velocidad en cada segundo, exactamente la misma cantidad. Un caso particular de movimiento uniformemente variado es aquel en el que la aceleración es nula y el móvil también mantiene entonces su velocidad constante (este tipo especial de movimiento se llama *movimiento rectilíneo uniforme* y lo estudiaremos en particular más adelante).

A partir de la ecuación diferencial para la aceleración instantánea (2.2) que vimos antes

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

y entonces

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\, dt$$

Suponiendo que en el instante inicial t_0 el móvil tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y en un momento posterior t el móvil tiene una velocidad **v**, podemos integrar la ecuación entre dichos límites, siendo

$$\int_{v_0}^{v} d\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}\, dt$$

Dado que la aceleración **a** se mantiene constante en el tiempo (movimiento uniformemente variado), podremos "sacarla" fuera de la integral, resultando

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{a}\,(t - t_0)$$

Tomando el instante inicial $t_0 = 0$, obtenemos

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\;\; t \tag{2.3}$$

Utilizando ahora la ecuación (2.1)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$$

La reemplazamos en (2.3) y escribimos que

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\;\; t$$

Por lo tanto

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{v}_0\;\; dt + \boldsymbol{a}\;\; t\;\; dt$$

Ahora integrando esta ecuación en el tiempo, desde el instante inicial (t_0) hasta el instante final del movimiento (t) y tomando que en el instante inicial t_0 el móvil se encuentra en la posición $\mathbf{X}_0$ y en el instante t el móvil se encontrará en la posición **X**, integramos la ecuación entre dichos límites

$$\int_{X_0}^{X} d\boldsymbol{X} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}_0 \, dt + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a} \ t \ dt$$

Dado que la velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ es una constante y la aceleración $\boldsymbol{a}$ tampoco varía porque es un MUV, se obtiene que

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{v}_0 \ (t - t_0) + \boldsymbol{a} \ \frac{1}{2} \ (t^2 - t_0^2)$$

y tomando como antes el instante inicial $t_0 = 0$, obtenemos

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{v}_0 \ t \ + \frac{1}{2} \ \boldsymbol{a} \ t^2 \qquad (2.4)$$

Llegamos entonces a que la integración de las ecuaciones diferenciales para la aceleración (2.2) y la velocidad (2.1) vistas anteriormente, permiten obtener en el caso del movimiento uniformemente variado, es decir con aceleración constante, las expresiones para la velocidad (2.3) y la posición (2.4) del móvil en función del tiempo.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a} \ t$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{v}_0 \ t \ + \frac{1}{2} \ \boldsymbol{a} \ t^2$$

Ecuaciones de movimiento para MUV

donde el subíndice "0" alude al valor de la variable cuando $t = 0$.

Es importante notar que estas ecuaciones son vectoriales, de modo que, tal como hicimos anteriormente, pueden descomponerse en un sistema de coordenadas cartesianas (ejes x, y, z) en tres ecuaciones, una para cada eje.

Por otro lado, como ya lo anticipamos, en particular, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es un caso especial de movimiento uniformemente variado: es un MUV con aceleración nula. Basta reemplazar en las ecuaciones de movimiento **a** = 0, para obtener las ecuaciones del MRU, donde resulta que:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{v}_0 \ t$$

Ecuaciones de movimiento para MRU

En las secciones siguientes representaremos gráficamente estas funciones para los casos correspondientes a movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV).

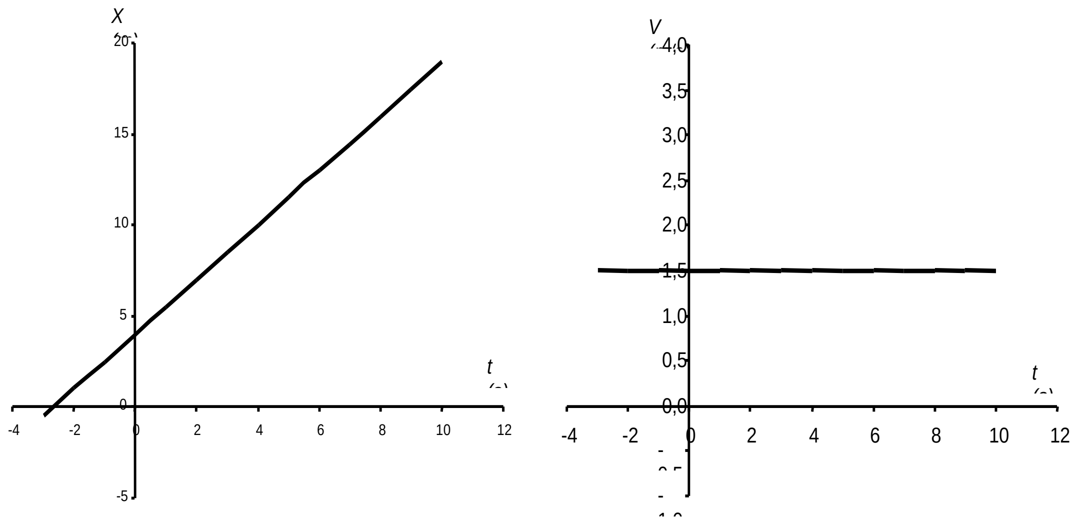
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Los movimientos pueden clasificarse según sea la relación entre la velocidad y el tiempo, **v** y *t***.** Si la velocidad **v** es constante en el tiempo, resulta un Movimiento Rectilíneo Uniforme **(MRU)**, el más sencillo que nos podemos imaginar y que corresponde al caso de que para *cualquier* intervalo de tiempo que tomemos, siempre obtenemos el mismo resultado para la velocidad.

Obsérvese que al ser la velocidad **v** una magnitud vectorial, decir que **v** es constante significa que no varía **el valor absoluto ni la dirección ni el sentido.**

El **MRU** es el movimiento más simple y es francamente infrecuente en la naturaleza. Un ejemplo podría ser el de la luz u otros fenómenos ondulatorios, propagándose en un medio homogéneo, o un cuerpo cayendo en un medio viscoso (después de un cierto tiempo de caída se alcanzará una *velocidad límite*).

En los gráficos correspondientes a MRU se representan, respectivamente, la posición y la velocidad del mismo móvil con movimiento uniforme a lo largo del eje x, respecto del tiempo.

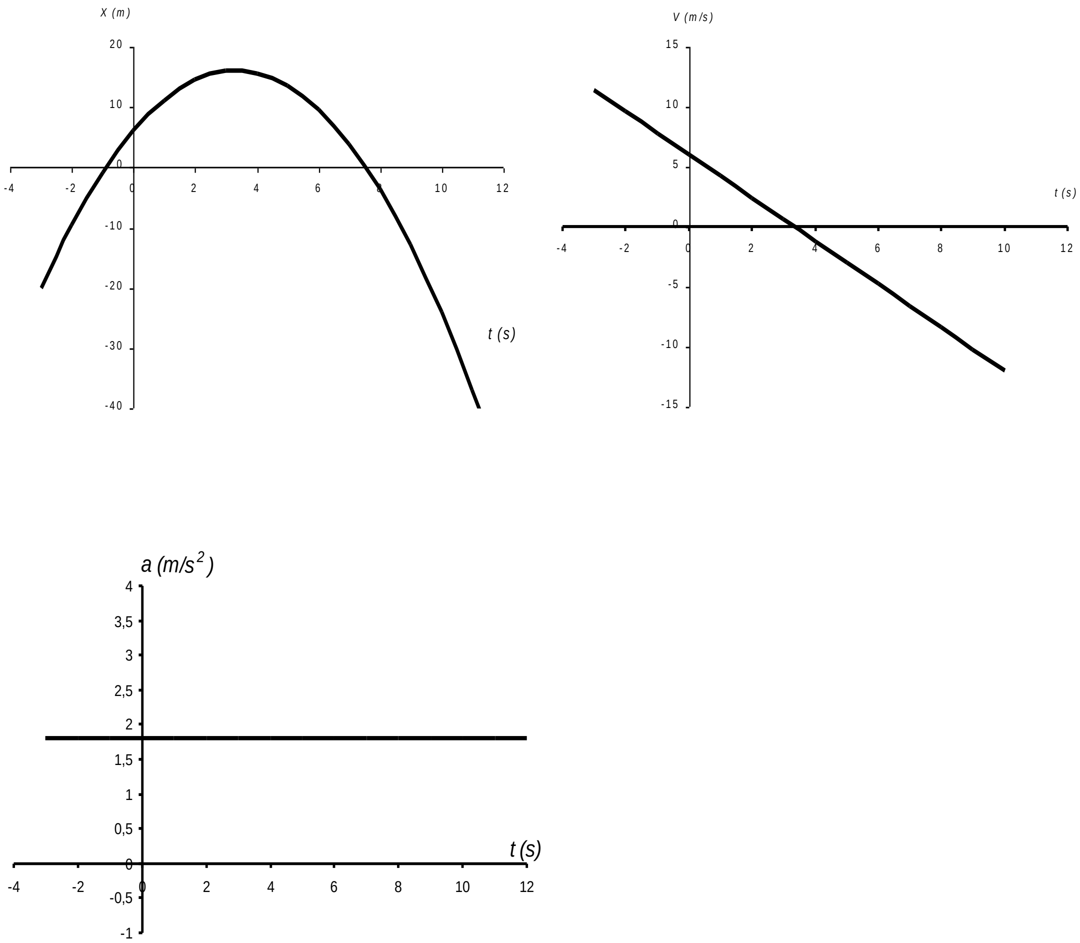


Movimiento Rectilíneo Uniforme

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

La aceleración, al igual que la posición y la velocidad, es una magnitud vectorial. Si tiene valor constante, estamos ante un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado **(MRUV)**, o sea que la velocidad va cambiando, pero este cambio ocurre a una tasa constante. Los movimientos en **caída libre** son aproximadamente **MRUV,** si se desprecia la interacción con el aire.

En los gráficos correspondientes a MRUV se pueden ver las curvas de posición, velocidad y aceleración del mismo móvil con movimiento uniformemente variado a lo largo del eje x. Obsérvese atentamente la relación entre las formas de las curvas obtenidas, en uno y otro caso.



Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

El espacio, tal como lo vemos, presenta tres dimensiones, largo, alto y ancho, que asociamos con los ejes ortogonales *"x", "y"* y *"z"* del sistema de coordenadas cartesianas. En los dos puntos anteriores vimos casos de movimientos rectilíneos, es decir en una única dimensión, por ejemplo a lo largo del eje "x" de coordenadas.

En esta sección vamos a estudiar movimientos uniformes o uniformemente variados que realizan partículas que se mueven sobre un plano bidimensional, por ejemplo el plano *"x-y"*. Esto no tiene que resultarnos difícil dado que ya conocemos las ecuaciones de movimiento (2.3) y (2.4), que como dijimos son ecuaciones vectoriales que pueden descomponerse cada una en tres ecuaciones similares, una para cada uno de los ejes de las coordenadas cartesianas.

La clave para determinar las posiciones y velocidades que adquiere una partícula que se mueve en más de una dimensión es descomponer los vectores posición, velocidad y aceleración del móvil en sus componentes cartesianas, y resolver en cada una de estas componentes un problema unidimensional como los que ya conocemos.

Luego para determinar la posición o la velocidad del móvil en un instante dado, basta con obtener las componentes x, y, z de los vectores posición y velocidad para ese instante y sumar respectivamente estas componentes en forma vectorial. El tiempo será la variable independiente que nos permita, instante a instante, ligar las componentes de posición, velocidad y aceleración del móvil para cada coordenada cartesiana y reconstruir los respectivos vectores posición velocidad y aceleración en cada momento.

A continuación vamos a estudiar un tipo especial de movimiento en dos dimensiones que se denomina tiro oblicuo.

TIRO OBLICUO

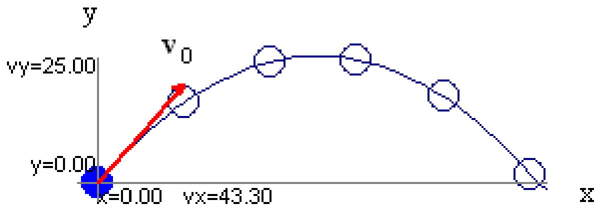
El tiro oblicuo es básicamente el movimiento que describen los proyectiles al ser lanzados. Haremos la salvedad de que en lo que sigue consideraremos un proyectil puntual (muy pequeño) y vamos a despreciar todo tipo de rozamiento y efectos externos secundarios, como el movimiento debido a la rotación terrestre.

Lo único que tendremos en cuenta es que debido a la atracción terrestre, el proyectil es acelerado verticalmente hacia el suelo por efecto de su propio peso, con una aceleración vertical constante dirigida hacia abajo, que denominamos *aceleración debida a la gravedad terrestre* y que vale $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Supongamos que en un instante inicial se dispara el proyectil desde el nivel del piso, con una velocidad dada, y queremos saber cuál será la máxima altura que alcanzará en su vuelo, cuánto demorará en alcanzarla y a qué distancia del punto de lanzamiento tocará de nuevo el piso

El esquema de la situación planteada, se muestra en la siguiente figura. El proyectil describirá su trayectoria en un plano vertical que contiene al vector velocidad. Tomamos el sistema de coordenadas de modo que *x* representa la distancia horizontal e *y* la distancia vertical desde el punto de lanzamiento del proyectil. La posición inicial del proyectil, cuando t = 0, será x_0, y_0.

En particular, en la figura se hizo coincidir la posición inicial del proyectil con el origen de coordenadas, de modo que cuando t = 0, es $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.



Tiro oblicuo

Disponemos como información la velocidad inicial de partida del proyectil, $\mathbf{v}_0$. Se debe recordar que la velocidad es un vector, por lo cual podemos descomponerla en sus componentes o proyecciones sobre los ejes *x* e *y*

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$$

Si el vector velocidad $\mathbf{v}_0$, forma un ángulo θ con el eje x, por simple trigonometría obtenemos que:

$$v_{0x} = v_0 \ Cos\,\theta$$
$$v_{0y} = v_0 \ Sen\,\theta$$

El movimiento que describe el proyectil puede tomarse como la superposición de dos movimientos simultáneos:

- Un MRU sobre el eje *x*, donde no actúa ninguna aceleración y por lo tanto la velocidad sobre esta coordenada se mantiene constante e igual a la velocidad inicial v_{0x}.

- Un MRUV sobre el eje *y*, donde actúa la aceleración debida a la gravedad terrestre g, la cual por apuntar hacia abajo, en sentido contrario al del eje *y*, la tomaremos con signo negativo. Por lo tanto la aceleración del proyectil en su movimiento sobre el eje *y*, será uniforme y valdrá $a_y = -9{,}8 \text{ m/s}^2$.

Podemos entonces plantear las siguientes ecuaciones de movimiento para el proyectil utilizando las ecuaciones (2.3) y (2.4) sobre las coordenadas correspondientes:

Sobre al eje x, horizontal:
$$x = x_0 + v_{0x}\ t$$
$$v_x = v_{0x}$$

Sobre el eje y, vertical:
$$y = y_0 + v_{0y}\ t + \frac{1}{2}\ a_y\ t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y\ t$$

El proyectil alcanzará la altura máxima cuando su velocidad vertical v_y, según el eje *y*, sea cero. La velocidad en el eje *y* será máxima al salir, pero irá disminuyendo hasta que llegue al punto más alto de su trayectoria, en el cual esta velocidad se hace nula, para inmediatamente invertir su sentido, momento en el que inicia la caída.

Entonces el tiempo necesario para alcanzar la máxima altura, llamémoslo t_M, lo podemos despejar de la última ecuación, poniendo como condición que v_y sea cero, resultando

$$t_M = -\frac{v_{0y}}{a_y}$$

Y la altura (máxima) a la que estará el proyectil en ese instante, llamémosla y_M, surge de reemplazar este valor del tiempo en la ecuación para la posición en y, siendo

$$y_M = y_0 - \frac{{v_{0y}}^2}{2\, a_y}$$

El tiempo total de vuelo, llamémoslo t_V, hasta que el proyectil toca el suelo nuevamente, es decir alcanza de nuevo la altura inicial y_0, lo calculamos utilizando otra vez la ecuación de la posición sobre el eje y, especializándola para $y = y_0$, quedando

$$y_0 = y_0 + v_{0y}\, t_V + \frac{1}{2}\, a_y\, {t_V}^2$$

Lo cual se cumple si

$$v_{0y}\, t_V + \frac{1}{2}\, a_y\, {t_V}^2 = 0 \;\rightarrow\; t_V\, \left(v_{0y} + \frac{1}{2}\, a_y\, t_V\right) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, una para t_V=0, trivial, ya que corresponde al instante inicial en el cual el proyectil está a la altura inicial y_0, y aún no comenzó su vuelo, y otra solución cuando

$$v_{0y} + \frac{1}{2}\, a_y\, t_V = 0 \rightarrow t_V = -\frac{2\, v_{0y}}{a_y}$$

Es importante notar que si comparamos este resultado para el tiempo de vuelo t_V, con el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima t_M, encontramos que el tiempo total de vuelo es justo el doble que el tiempo empleado para llegar a la máxima altura. Es decir que el proyectil demora lo mismo para subir que para bajar:

$$t_V = 2\, t_M$$

Mientras tanto, durante todo el tiempo de vuelo, el proyectil avanzará con velocidad constante v_{0x} sobre el eje x. Por lo tanto para calcular el alcance o distancia máxima a la que llegará al tocar de nuevo el suelo, llamémosla x_M, basta utilizar la ecuación de movimiento (MRU) sobre el eje x, especializándola con el tiempo igual al tiempo de vuelo, así

$$x_M = x_0 + v_{0x}\, t_V$$

y reemplazando por el valor hallado para t_V el alcance del proyectil resulta ser

$$x_M = x_0 - 2\, \frac{v_{0x}\, v_{0y}}{a_y}$$

A continuación se resumen los resultados principales encontrados para el tiro oblicuo.

Descomposición de velocidades:	$v_{0x} = v_0 \ Cos\ \theta$ $v_{0y} = v_0 \ Sen\ \theta$
Sobre al eje x, horizontal:	$x = x_0 + v_{0x}\ t$ $v_x = v_{0x}$
Sobre el eje y, vertical:	$y = y_0 + v_{0y}\ t + \frac{1}{2}\ a_y\ t^2$ $v_y = v_{0y} + a_y\ t$
Tiempo para altura máxima:	$t_M = -\frac{v_{0y}}{a_y}$
Tiempo total de vuelo:	$t_V = 2\ t_M$
Altura máxima:	$y_M = y_0 - \frac{{v_{0y}}^2}{2\ a_y}$
Alcance:	$x_M = x_0 - 2\ \frac{v_{0x}\ v_{0y}}{a_y}$

Ecuaciones para el Tiro Oblicuo

Ejemplo

Tomemos el caso concreto del disparo de un proyectil en el cual el vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ forme un ángulo θ de 30° con la horizontal y su módulo valga v_0 = 50 m/s. Queremos determinar la altura máxima a la que subirá, el tiempo que demora en llegar a esta altura y la distancia (alcance) a la cual tocará el suelo.

En tal caso

$$v_{0x} = v_0 \ Cos\ \theta = 50\frac{m}{s}\ Cos(30°) = 43{,}30\frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \ Sen\ \theta = 50\frac{m}{s}\ Sen(30°) = 25{,}00\frac{m}{s}$$

$$a_y = -9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

y tomamos en t = 0, x_0 = 0 e y_0 = 0

Aplicando las fórmulas deducidas en esta sección, se obtienen los resultados que se indican a continuación.

Tiempo para alcanzar la altura máxima:

$$t_M = -\frac{v_{0y}}{a_y} = -\frac{25\frac{m}{s}}{(-9{,}8)\frac{m}{s^2}} = 2{,}55\ s$$

Tiempo total de vuelo:

$$t_V = 2\, t_M = 2\ \cdot 2{,}55\ s = 5{,}10\ s$$

Altura máxima:

$$y_M = y_0 - \frac{{v_{0y}}^2}{2\, a_y} = 0 - \frac{(25\,\frac{m}{s})^2}{2\,(-9{,}8\,\frac{m}{s^2})} = 31{,}89\ m$$

Alcance:

$$x_M\ =\ x_0 -\ 2\ \frac{v_{0x}\ v_{0y}}{a_y} = 0 - 2\left(\frac{43{,}3\,\frac{m}{s}\cdot 25\,\frac{m}{s}}{\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)}\right) = 220{,}90\ m$$

Nota curiosa

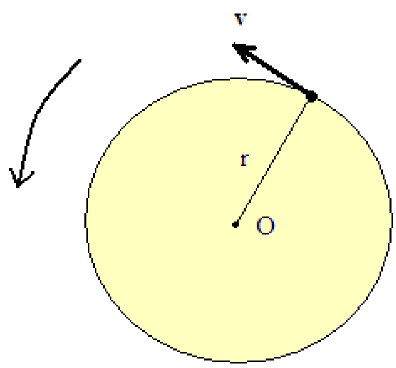
Después de haber hecho estas cuentas, vale la siguiente reflexión:

Cualquier proyectil disparado con la misma velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ (módulo y ángulo), independientemente de su peso, describe la misma trayectoria. Llegará a la misma altura máxima, en el mismo tiempo y tendrá el mismo alcance, no importa cuánto pese.

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento circular es aquel que describe un móvil que se desplaza a una distancia fija de un punto central, es decir que se mueve sobre una órbita circular.

Un ejemplo de movimiento circular es el que describe un punto perteneciente al radio de una rueda, un punto de la polea de un motor, un punto de la hélice de un helicóptero, un punto sobre la plataforma de una calesita, o sobre el aspa de un molino, por mencionar algunos.



En todos los casos existe un centro de giro y el punto que describe el movimiento circular se ubica a una distancia r (radio) de ese centro alrededor del cual gira.

Si llamamos $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ al ángulo recorrido por el radio r (que une el centro de giro con el móvil) en un tiempo $\Delta t = t - t_0$, de modo similar a lo que hicimos cuando estudiamos velocidad media, puede definirse una *velocidad angular media* como el ángulo recorrido en un determinado tiempo, siendo:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Realizando la operación de paso al límite como hicimos anteriormente, tendremos para la velocidad angular instantánea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

resultando entonces la *velocidad angular*:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.5)$$

Retomando el mismo razonamiento que cuando estudiamos la aceleración, si ahora la velocidad angular ω varía con el tiempo, podemos definir una nueva magnitud que nos informe cómo es el cambio de la velocidad angular con el tiempo. Llamaremos aceleración angular media a:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Y realizando la operación de paso al límite como antes, tendremos la aceleración angular instantánea:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

resultando la *aceleración angular*:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (2.6)$$

y podemos escribir

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

Resulta a estas alturas evidente el paralelismo entre las ecuaciones (2.1) y (2.2) y las ecuaciones (2.5) y (2.6), por lo que podemos integrar estas dos últimas ecuaciones siguiendo el mismo procedimiento matemático cumplido en el caso anterior, y obtendremos las ecuaciones de movimiento para el Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCUV), es decir aquel con aceleración angular (α) constante.

$$\omega = \omega_0 + \alpha\ t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\ t\ + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$$

Ecuaciones de movimiento para MCUV

donde el subíndice "0" alude al valor de la variable cuando $t = 0$.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Si en particular, el movimiento circular se realiza con velocidad angular constante, se denomina Movimiento Circular Uniforme (MCU) y es un caso especial de movimiento circular uniformemente variado: es un MCUV con aceleración angular nula. Basta reemplazar en las ecuaciones de movimiento α = 0, para obtener las ecuaciones del MCU, donde resulta que:

$$\omega = \omega_0$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\ t$$

Ecuaciones de movimiento para MCU

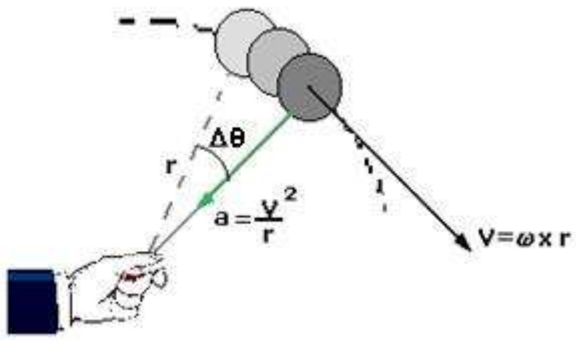
VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Hasta aquí estudiamos las variables angulares (ángulo recorrido, velocidad angular y aceleración angular) asociadas al movimiento circular, pero ahora queremos calcular la velocidad y la aceleración del móvil que realiza este movimiento circular.

Pensemos por ejemplo en un cuerpo que se encuentra atado al extremo de una cuerda, al cual se lo hace girar en una órbita circular con centro en el otro extremo de la cuerda. En este caso el largo de la cuerda corresponde al radio r asociado al movimiento circular.

Al cumplir una vuelta completa el radio r habrá barrido un ángulo de 360°, el cual expresado en radianes corresponde a un ángulo de 2π radianes, en tanto que el móvil habrá recorrido una distancia (llamémosla s) igual a la longitud de la circunferencia de radio r, es decir que la distancia recorrida es $s = 2\pi\, r$.

En general, cuando el radio r barre un ángulo cualquiera $\Delta\theta$, el móvil recorrerá una distancia $\Delta s = \Delta\theta\ r$.



Realizando ahora el paso al límite, derivando con respecto al tiempo, y recordando que la distancia r del móvil al centro de giro se mantiene constante (dado que es un movimiento circular) resulta que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\, r = \omega\, r$$

Al valor $\frac{ds}{dt}$ se lo denomina velocidad tangencial v_t del móvil, siendo entonces

$$v_t = \omega\, r \qquad (2.7)$$

El nombre velocidad tangencial pone de manifiesto el hecho de que el vector velocidad del móvil que describe un movimiento circular, es siempre tangente a su trayectoria u órbita circular, y no tiene componente radial. Es importante entender que si la velocidad tuviera componente en la dirección del radio, esto haría que el móvil se acercara o alejara del centro de giro, lo que variaría su distancia radial r a dicho centro, por lo que dejaría de ser un movimiento circular (ya que por definición de movimiento circular el radio debe ser constante).

Este valor v_t *corresponde al módulo de la velocidad tangencial*, en tanto que el vector velocidad (tangencial) del móvil tiene dirección tangente a la trayectoria circular y su sentido depende del sentido de giro (horario o antihorario).

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Queda ahora por preguntarnos qué sucede con la aceleración de un móvil sometido a un movimiento circular.

En la última parte de la sección anterior vimos que el vector velocidad de un móvil que describe una trayectoria circular cambia permanentemente su dirección. Aún en el caso de un MCU en el cual la velocidad angular se mantiene constante y por lo tanto el módulo de la velocidad tangencial tampoco varía, la dirección del vector velocidad irá cambiando y, como ya estudiamos, si hay cambio en el vector velocidad existe aceleración.

Aceleración en el MCU

En el caso más simple, correspondiente al MCU (con aceleración angular nula), para que el móvil no salga despedido en línea recta y continúe describiendo la trayectoria circular manteniendo el módulo de su velocidad tangencial constante, es necesario que exista una fuerza (ya veremos este tema en detalle en la unidad dedicada a Dinámica) dirigida hacia el centro de giro, que le obligue a modificar su trayectoria instante a instante.

Esta fuerza, que en el caso del cuerpo atado al extremo de una cuerda está ejercida por la tensión de esta cuerda, produce una aceleración sobre el móvil que se denomina *aceleración centrípeta* porque está dirigida hacia el centro de giro y puede calcularse como:

$$a_c = \omega^2 \, r = \frac{v_t^2}{r} \tag{2.8}$$

Aceleración en el MCUV

En el caso más general correspondiente a un MCUV (con aceleración angular constante distinta de cero), además de modificarse la dirección del vector velocidad, también va a ir cambiando el módulo de la velocidad tangencial del móvil, y en tal caso existirá, además de la aceleración centrípeta, una *aceleración tangencial* responsable del cambio en el módulo de la velocidad tangencial, que puede calcularse derivando con respecto al tiempo la ecuación (2.7), y vale:

$$a_t = \alpha \; r \tag{2.9}$$

En el MCUV, por lo tanto la aceleración del móvil tendrá contribuciones de ambos tipos, centrípeta y tangencial. El módulo de la aceleración se debe calcular como

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

y su dirección y sentido estará dado por la suma vectorial de ambas contribuciones.

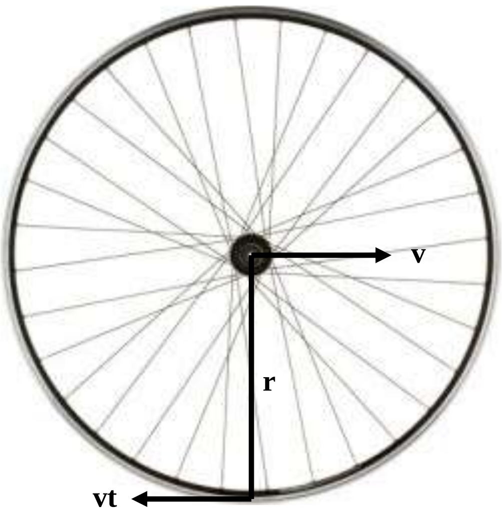
Si reflexionamos sobre la relación entre las direcciones de la aceleración y de la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo que está girando, empezaremos a encontrar el camino que nos permita comprender la relación entre el movimiento y las fuerzas, tema de estudio de la Dinámica.

Para que un cuerpo gire alrededor de un punto
es necesario aplicarle una fuerza.

Ejemplo

Una bicicleta avanza en línea recta sobre el pavimento, de modo que sus neumáticos ruedan sin deslizar. El diámetro de sus ruedas es de 60 cm.

a) Si la bicicleta se mueve con velocidad constante de 18 km/h, determinar la velocidad angular de las ruedas y la aceleración centrípeta de un punto ubicado en su periferia.
b) En un momento dado el conductor comienza a frenar en forma uniforme hasta que la bicicleta se detiene al cabo de 15 segundos. Determinar la aceleración angular de las ruedas, la aceleración tangencial de un punto ubicado en su periferia y la cantidad de vueltas que dan las ruedas desde el momento en que se aplica el freno hasta que la bicicleta se detiene.



Lo importante para resolver este problema es entender que cuando una rueda gira sobre una superficie sin deslizar, es decir sin patinar ni resbalar sobre esta superficie, la velocidad de avance en línea recta del centro de giro (en este caso la velocidad de la bicicleta) es, en módulo, igual a la velocidad tangencial de un punto cualquiera ubicado en la periferia (borde) de la rueda. Estos son los puntos que hacen contacto con el pavimento.

-Parte a)
Inicialmente la bicicleta se mueve con velocidad constante v = 18 km/h = 5 m/s. Según lo indicado antes la velocidad tangencial de un punto en la periferia de la rueda es

$$v_t = v = 5 \text{ m/s, y de acuerdo con (2.7), } v_t = \omega\, r$$

de modo que la velocidad angular resulta constante (MCU) y vale:

$$\omega = \frac{v_t}{r} = \frac{5\,\frac{m}{s}}{0{,}3\ m} = 16{,}67\,\frac{1}{s}$$

La velocidad angular queda expresada en unidades de 1/s , que corresponde al ángulo (en radianes) recorrido por cada segundo.

Para encontrar la aceleración centrípeta de un punto en el borde de la rueda, utilizamos la ecuación (2.8), siendo

$$a_c = \omega^2\, r = \frac{v_t^2}{r} = \frac{(5\,\frac{m}{s})^2}{0{,}3\ m} = 83{,}33\,\frac{m}{s^2}$$

-Parte b)
Ahora el conductor comienza a frenar en forma uniforme, lo que indica que la (des)aceleración es constante, y esto corresponde a una (des)aceleración angular uniforme. Es decir que en esta parte del problema estamos ante un MCUV.

Para calcular la aceleración angular utilizamos que

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t_f - t_0} = \frac{(0 - 16{,}67)\,\frac{1}{s}}{(15 - 0)\ s} = -1{,}11\,\frac{1}{s^2}$$

El signo negativo indica que la velocidad angular (de rotación) va disminuyendo a medida que pasa el tiempo.

Para calcular la aceleración tangencial de un punto ubicado en el borde de la rueda, aplicamos la ecuación (2.9)

$$a_t = \alpha\ r = -1{,}11\,\frac{1}{s^2}\ 0{,}3\,m = -0{,}33\,\frac{m}{s^2}$$

se trata también de una desaceleración (aceleración negativa) ya que la velocidad del punto irá disminuyendo hasta que la rueda se detenga.

Por último veamos cuántas vueltas efectúa cada rueda de la bicicleta desde que se aplica el freno hasta que se detiene al cabo de 15 segundos. Primero tenemos que calcular el ángulo total recorrido utilizando la ecuación de movimiento para el MCUV

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\ t\ + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$$
$$\theta = 0 + 16{,}67\frac{1}{s}\ 15\ s + \frac{1}{2}\left(-1{,}11\,\frac{1}{s^2}\right)\ (15\ s)^2\ = 125{,}18\ radianes$$

Dividiendo ahora este ángulo por 2π, que es el ángulo (en radianes) correspondiente a una vuelta completa, resulta que la cantidad de vueltas que da la rueda es

$$Cantidad\ de\ vueltas = \frac{125{,}175\ radianes}{2\pi\ \frac{radianes}{vuelta}} = 19{,}93\ vueltas$$

RESUMEN

MOVIMIENTO: El movimiento es relativo y todo se está moviendo. Para describir un movimiento se debe empezar por elegir un sistema de referencia.

VELOCIDAD: La velocidad es una magnitud que mide el cambio de posición en relación al tiempo. Es una magnitud vectorial.

ACELERACIÓN: La aceleración mide el cambio de velocidad en relación al tiempo. Es una magnitud vectorial.

MRU y MUV: El Movimiento Rectilíneo Uniforme y el Movimiento Uniformemente Variado son los movimientos más simples y este último es característico de los cuerpos en caída libre.

TIRO OBLICUO: Es un movimiento que se desarrolla en dos dimensiones y que resulta de la composición de dos movimentos, un MRU sobre el eje horizontal y un MRUV sobre el eje vertical.

MOVIMIENTO CIRCULAR: Es un movimiento bidimensional que realiza un móvil que se desplaza a una distancia fija (radio) de un centro de giro, describiendo una trayectoria circular.

El movimiento circular requiere, igual que el variado, la acción de fuerzas, pero esto no es así para el movimiento rectilíneo uniforme, ya que los cuerpos tienden a permanecer en el estado de movimiento (velocidad) en el que se encuentran, tal como lo establece el principio de inercia (según se verá en la siguiente unidad).